Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 36–43

Оператор обобщенного сдвига, порожденный весом Якоби, и точное неравенство Никольского для алгебраических многочленов на отрезке

В. В. Арестов, М. В. Дейкалова

Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Обсуждаются свойства оператора обобщенного сдвига, порожденного весом Якоби $\phi^{(\alpha,\beta)}(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ \alpha,\beta>-1$, на отрезке $[-1,1]$. Оператор обобщенного сдвига применяется в исследовании неравенства Никольского для алгебраических многочленов на отрезке $[-1,1]$ между равномерной нормой и нормой пространства $L_q^{(\alpha,\beta)}(-1,1),\ 1\leqslant q<\infty$, с весом Якоби при $\alpha\geqslant\beta\geqslant-1/2,\ \alpha>-1/2$. Обоснование приведенных здесь результатов содержится в работе авторов [2]. Для ультрасферического веса, а точнее, в случае $\alpha=\beta>-1/2$ подобные результаты были получены авторами в [1].

1. Обозначения. При $1\leqslant q<\infty$ для $\alpha,\beta>-1$ обозначим через $L_q^{(\alpha,\beta)}=L_q^{(\alpha,\beta)}(-1,1)$ пространство измеримых на $(-1,1)$ комплекснозначных функций f таких, что функция $|f|^q$ суммируема на $(-1,1)$ с весом Якоби $\phi^{(\alpha,\beta)}(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$; это банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}(-1,1)}=\left(\frac{1}{\lambda(\alpha,\beta)}\int_{-1}^{1}|f(x)|^q\phi^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx\right)^{1/q},\quad \lambda(\alpha,\beta)=\int_{-1}^{1}\phi^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx. \tag{1}$$

Пространство $L_2^{(\alpha,\beta)}$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(f,g)=(f,g)_{L_2^{(\alpha,\beta)}}=\int_{-1}^{1}f(x)\,\overline{g(x)}\,\phi^{(\alpha,\beta)}(x)dx,\quad f,g\in L_2^{(\alpha,\beta)}. \tag{2}$$

Наряду с $L_q^{(\alpha,\beta)}$ рассмотрим классическое пространство $C=C[-1,1]$ (комплекснозначных) непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C[-1,1]}=\max\{|f(x)|\colon x\in[-1,1]\}.$$

2. Оператор обобщенного сдвига. Оператор обобщенного сдвига изначально определяется в пространстве $L_2^{(\alpha,\beta)}$, исходя из разложения функций по системе многочленов Якоби.

Пусть $R_\nu=R_\nu^{(\alpha,\beta)},\ \nu\geqslant0$, есть система алгебраических многочленов Якоби степени ν, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом Якоби, а точнее, ортогональных относительно скалярного произведения (2) и нормированных условием $R_\nu(1)=1,\ \nu\geqslant0$ (см., например,

Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705).

[3, гл. IV], [4, гл. VII]). В случае $\alpha \geqslant \beta > -1$, $\alpha \geqslant -1/2$ многочлены Якоби удовлетворяют соотношению (см. например, [3, гл. VII, § 7.32, теорема 7.32.1], [4, гл. VII, § 2, теорема 7.1])

$$\max\{|R_\nu(x)|\colon x \in [-1,1]\} = R_\nu(1) = 1, \quad \nu \geqslant 0.$$

Если же выполняется более жесткое условие $\alpha > \beta > -1$, $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$, то при $\nu \geqslant 1$ имеет место более сильное свойство (см. [3, §§ 4.2, 7.31, 7.32], [4, гл. VII, § 2, теорема 7.1])

$$|R_\nu(x)| < R_\nu(1) = 1, \quad x \in [-1,1).$$

Система многочленов Якоби $\{R_\nu\}_{\nu \geqslant 0}$ образует ортогональный базис в $L_2^{(\alpha,\beta)}$. Произвольная функция $f \in L_2^{(\alpha,\beta)}$ разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu R_\nu(x), \qquad f_\nu = \frac{(f, R_\nu^{(\alpha,\beta)})}{(R_\nu^{(\alpha,\beta)}, R_\nu^{(\alpha,\beta)})}. \tag{3}$$

Для пары функций $f, g \in L_2^{(\alpha,\beta)}$ имеет место обобщенный вариант равенства Парсеваля

$$(f,g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu f_\nu \bar{g}_\nu, \qquad \delta_\nu = (R_\nu, R_\nu) = \|R_\nu\|^2_{L_2^{(\alpha,\beta)}}. \tag{4}$$

В частности, норма функции $f \in L_2^{(\alpha,\beta)}$ выражается через ее коэффициенты Фурье $\{f_\nu\}$ равенством Парсеваля $\|f\|^2_{L_2^{(\alpha,\beta)}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu\, |f_\nu|^2$.

Оператором обобщенного сдвига с шагом $t \in [-1,1]$ называется линейный оператор Θ_t, который определен на функциях $f \in L_2^{(\alpha,\beta)}$ с рядом Фурье (3) соотношением

$$\Theta_t f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu R_\nu(t) R_\nu(x). \tag{5}$$

Довольно очевидно, что при $\alpha \geqslant \beta > -1$, $\alpha \geqslant -1/2$ для любого $t \in [-1,1]$ оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_2^{(\alpha,\beta)}$ и имеет единичную норму: $\|\Theta_t\|_{L_2^{(\alpha,\beta)} \to L_2^{(\alpha,\beta)}} = 1$. Более того, если $\alpha > \beta > -1$, $\alpha \geqslant -1/2$, $t \in [-1,1)$, то норма оператора Θ_t достигается лишь на функциях, совпадающих с некоторой константой (почти всюду) на $(-1,1)$.

Оператор $\Theta_t = \Theta_t^{(\alpha,\beta)}$ формулой (5) определен, в частности, на множестве $\mathscr{P}$ всех алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами. Множество $\mathscr{P}$ плотно в пространстве $L_q^{(\alpha,\beta)}$, $1 \leqslant q < \infty$; в связи с этим оператор $\Theta_t = \Theta_t^{(\alpha,\beta)}$ продолжается (единственным образом) до линейного ограниченного оператора в пространстве $L_q^{(\alpha,\beta)}$ при $1 \leqslant q < \infty$. Значение $t = 1$ не представляет интереса, поскольку оператор Θ_1 есть единичный оператор, поэтому в последующих рассуждениях это значение исключено.

Важным инструментом изучения и использования оператора обобщенного сдвига является интегральное представление; таких представлений в настоящее время существует несколько. Они базируются на так называемых теоремах (формулах) умножения для многочленов Якоби. Вероятно, впервые формула умножения была найдена А. М. Лежандром в 1817 году для многочленов, которые сейчас называются многочленами Лежандра ($\alpha = \beta = 0$). В 1874 году Л. Гегенбауэр получил (см. [5, гл. XI, § 11.5]) формулу умножения для ультрасферических многочленов ($\alpha = \beta > -1/2$). К настоящему времени этой тематике посвящено большое число исследований; см., например, [6, 7] и приведенную там библиографию.

Для многочленов Якоби одной из наиболее известных является теорема умножения Т. Курнвиндера [8]. В алгебраической форме она состоит в том, что для целого $\nu \geqslant 0$ при

$\alpha > \beta > -1/2,\ -1 \leqslant t, x \leqslant 1$ имеет место формула

$$R_\nu(t)R_\nu(x) = \frac{1}{\kappa(\alpha,\beta)} \int_0^1 \int_{-1}^1 R_\nu\left(U(t,x,\rho,\xi)\right)\left(1-\rho^2\right)^{\alpha-\beta-1} \rho^{2\beta+1}\left(1-\xi^2\right)^{\beta-1/2} d\xi d\rho, \tag{6}$$

$$U(t,x,\rho,\xi) = tx + \rho\xi\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(\rho^2-1)(1-t)(1-x). \tag{7}$$

$$\kappa(\alpha,\beta) = \int_0^1\int_0^\pi \left(1-\rho^2\right)^{\alpha-\beta-1}\rho^{2\beta+1}(\sin\zeta)^{2\beta} d\zeta d\rho = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\alpha-\beta\right)\Gamma\left(\beta+1/2\right)}{2\Gamma(\alpha+1)}.$$

При фиксированных t, x множество значений $I(t,x)$ функции (7) по переменным (ξ,ρ) на прямоугольнике $\Pi = \{(\xi,\rho)\colon \xi \in [-1,1],\ \rho \in [0,1]\}$ является отрезком $I(t,x) = [a(t,x), b(t,x)]$, с концами

$$a(t,x) = \begin{cases} -1, & x+t \leqslant 0; \\ tx - \sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-x^2}\,, & x+t \geqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

$$b(t,x) = tx + \sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-x^2}\,. \tag{9}$$

Для обосновании следующего утверждения при $\alpha > \beta > -1/2$ используется формула (6). При $\alpha > \beta = -1/2$ для его обоснования используется известное выражение многочленов Якоби $R_\nu^{(\alpha,-1/2)}$ через ульрасферические многочлены (см. [3, гл. IV, § 4.1, формула (4.1.5)]) и формула умножения для ульрасферических многочленов (см., например, [7, формула (5.1)], [5, гл. XI, §11.5]).

Теорема 1. *При $\alpha > \beta \geqslant -1/2$ для $x \in (-1,1),\ t \in [-1,1)$ и любого целого $\nu \geqslant 0$ имеет место формула*

$$R_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)R_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) = \int_{a(t,x)}^{b(t,x)} R_\nu^{(\alpha,\beta)}(u)F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)du, \tag{10}$$

в которой ядро $F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)$ непрерывное, положительное на множестве $\{(t,x,u) : x \in (-1,1),\ t \in [-1,1),\ u \in (a(t,x), b(t,x))\}$ и обладает свойством

$$\int_{a(t,x)}^{b(t,x)} F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)du = 1.$$

Формулу (10) можно считать уточнением формул умножения, которые раньше получили Р. Аскей и С. Ваингер [9], Дж. Гаспер [10]. Довольно стандартным образом из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *При $1 \leqslant q < \infty,\ \alpha > \beta \geqslant -1/2,\ -1 \leqslant t < 1$ для любой функции $f \in L_q^{(\alpha,\beta)}$ интеграл $\displaystyle\int_{a(x,t)}^{b(x,t)} f\left(u\right)F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)du$ существует почти для всех $x \in (-1,1)$ и имеет место формула*

$$(\Theta_t f)(x) = \int_{a(x,t)}^{b(x,t)} f\left(u\right)F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)du, \quad f \in L_q^{(\alpha,\beta)}. \tag{11}$$

Г. Бавинк [11], используя результат Дж. Гаспера [10], сделал вывод, что если $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2,\ \alpha > -1/2$, то при любом $t \in (-1,1)$ оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_q^{(\alpha,\beta)},\ 1 \leqslant q \leqslant \infty$, и имеет единичную норму: $\|\Theta_t\|_{L_q^{(\alpha,\beta)} \to L_q^{(\alpha,\beta)}} = 1$. Важным для нас является вопрос об экстремальных функциях, на которых достигается норма оператора. Для исследования этого вопроса авторы использовали теорему 2, в которой описан носитель ядра представления.

Относительно (комплекснозначной) функции f, определенной на некотором множестве G, будем говорить, что она сохраняет знак на G, если существует число $\zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| = 1$, такое, что $\zeta f \geqslant 0$ почти всюду на G; в этом случае число $\overline{\zeta}$ будем называть знаком функции f на G.

При $-1 \leqslant t < 1$, $\alpha > \beta \geqslant -1/2$, обозначим через $\mathfrak{F}[t] = \mathfrak{F}^{(\alpha,\beta)}[t]$ множество функций $f \in L_1^{(\alpha,\beta)}$, которые при каждом $x \in (-1,1)$ на отрезке $I(t,x)$ сохраняют знак (вообще говоря, зависящий от отрезка). Если $-1 \leqslant t \leqslant 0$, то $\mathfrak{F}[t]$ совпадает с множеством функций из $L_1^{(\alpha,\beta)}$, сохраняющих знак на $(-1,1)$. При $0 < t < 1$ функции, сохраняющие знак на $(-1,1)$, конечно, принадлежат классу $\mathfrak{F}[t]$; однако, обратное неверно. Тем не менее, если функция отлична от нуля (почти всюду) на $(-1,1)$, то, эта функция принадлежит множеству $\mathfrak{F}[t]$ в том и только том случае, если она сохраняет знак на $(-1,1)$.

Теорема 3. *При $\alpha > \beta \geqslant -1/2$, $1 \leqslant q < \infty$, $t \in [-1,1)$ справедливы следующие утверждения.*

(1) *Оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_q^{(\alpha,\beta)}$ и имеет единичную норму.*

(2) *При $1 < q < \infty$ норма оператора Θ_t достигается на функции $f \in L_q^{(\alpha,\beta)}$ в том и только том случае, если f есть константа почти всюду на $(-1,1)$.*

(3) *При $q = 1$ множество функций, на которых достигается норма оператора $\Theta_t^{(\alpha,\beta)}$ в пространстве $L_1^{(\alpha,\beta)}$, совпадает с множеством $\mathfrak{F}[t] = \mathfrak{F}^{(\alpha,\beta)}[t]$. В частности, если функция отлична от нуля* (почти всюду) *на $(-1,1)$, то на этой функции норма оператора достигается в том и только том случае, если функция сохраняет знак* (почти всюду) *на $(-1,1)$.*

2. Неравенство Никольского. Пусть $\mathscr{P}_n = \mathscr{P}_n(\mathbb{C}),\ n \geqslant 0$, есть множество алгебраических многочленов одного переменного степени (не выше) n с комплексными коэффициентами. Обозначим через $M_n = M_{n,q}^{(\alpha,\beta)}$ наилучшую (наименьшую возможную) константу в неравенстве

$$\|p_n\|_{C[-1,1]} \leqslant M_n \, \|p_n\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}(-1,1)}, \quad p_n \in \mathscr{P}_n. \tag{12}$$

Одна из целей данной заметки состоит в исследовании экстремальных многочленов неравенства (12), т. е. многочленов $\rho_n \in \mathscr{P}_n,\ \rho_n \not\equiv 0$, на которых это неравенство обращается в равенство. В частности, будет изучаться свойство единственности экстремальных многочленов. Если ρ_n – экстремальный многочлен неравенства (12) и любой другой экстремальный многочлен имеет вид $c\rho_n,\ c \neq 0$, то будем говорить, что ρ_n – *единственный* экстремальный многочлен неравенства (12).

Неравенство (12) является конкретным вариантом неравенства разных метрик или неравенства Никольского [12], см. также [13]. Первые результаты в этой тематике получили П. Л. Чебышев и его ученики братья А. А. и В. А. Марковы. К настоящему времени точным неравенствам для алгебраических многочленов и родственным, близким неравенствам для тригонометрических полиномов посвящено большое число исследований, см. монографии [14–18], статьи [1, 2, 19, 20], и приведенную в них библиографию.

Опишем более подробно известные на данный момент результаты, относящиеся к неравенству (12). А. Лупас [21] получил точное неравенство (12) (т. е. нашел значение наилучшей константы и выписал экстремальный многочлен) при $q = 2$ для веса Якоби со значениями пераметров $\alpha, \beta \geqslant -1/2$. В случае $\alpha = \beta = -1/2$ вес Якоби называют весом Чебышева. Неравенство (12) для веса Чебышева можно переписать в виде классического неравенства Никольского между равномерной нормой и L_q-нормой (с единичным весом) на множестве тригонометрических полиномов порядка (не выше) n. Вероятно, впервые такое неравенство изучал Д. Джексон (1933, $q=2$). В настоящее время довольно полно исследован случай $q=1$; этот вариант неравенства разных метрик изучали С. Б. Стечкин, Л. В. Тайков, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, Д. В. Горбачев; см. статьи [22–24] и приведенную в них библиографию. П. Ю. Глазырина и И. Е. Симонов [25] в неравенстве (12) для веса Чебышева при $q=1$ построили экстремальный многочлен, доказали его единственность и показали, что его равномерная норма достигается в концевой точке отрезка $[-1,1]$.

При исследовании неравенства (12) можно ограничиться случаем $\alpha \geqslant \beta$. Кроме того, наши методы применимы лишь при $\alpha, \beta \geqslant -1/2$. Поэтому в дальнейшем в большинстве ситуаций мы будем предполагать, что $\alpha > \beta \geqslant -1/2$.

Наряду с неравенством (12) в качестве вспомогательного, однако, представляющего и самостоятельный интерес будет рассматриваться неравенство

$$|p(1)| \leqslant D_n \, \|p\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}}, \qquad p \in \mathscr{P}_n, \tag{13}$$

с наилучшей константой $D_n = D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}$. Ясно, что $D_n \leqslant M_n$. Как будет следовать из дальнейшего, на самом деле, по крайней мере, при $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$ имеет место равенство $D_n = M_n$.

Для веса Якоби $\phi^{(\alpha+1,\beta)}(x) = \phi^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta}$, параметра q, $1 \leqslant q < \infty$, и целого $n \geqslant 1$ обозначим через $\varrho_n = \varrho_{n,q}^{(\alpha+1,\beta)}$ многочлен порядка n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_q^{(\alpha+1,\beta)}$, т. е. многочлен ϱ_n, являющийся решением задачи

$$\min\{\|p_n\|_{L_q^{(\alpha+1,\beta)}} : p_n \in \mathscr{P}_n^1\} = \|\varrho_n\|_{L_q^{(\alpha+1,\beta)}}, \tag{14}$$

где $\mathscr{P}_n^1$ есть множество многочленов $p_n(x) = x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ степени n, старший коэффициент которых равен 1.

Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, впервые появились в исследованиях П. Л. Чебышева. Он нашел (1854) многочлен с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $C[-1,1]$; это многочлен, который в настоящее время называют многочленом Чебышева первого рода. А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев (1873) решили такую задачу в $L(-1,1)$; здесь экстремальным является многочлен Чебышева второго рода. В последующем Е. И. Золотарев, Я. Л. Геронимус, Ф.Пейерсторфер, В. Э. Гейт, А. Л. Лукашов, И. Е. Симонов и многие другие исследовали алгебраические многочлены и тригонометрические полиномы с несколькими фиксированными старшими коэффициентами и некоторыми другими ограничениями, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной и интегральной нормах; см. библиографию в [1, 25].

Решение задачи (14) при $q=2$ хорошо известно (см., например, [21], [26, § 2.1]), а именно, в этом случае решением будет многочлен Якоби $R_n^{(\alpha+1,\beta)}$ порядка n, поделенный на старший коэффициент. В случае $q=1$ при целых значениях α и β задача (14) сводится к исследованию системы n полиномиальных уравнений от n неизвестных корней экстремального многочлена, которую, по крайней мере, для малых n удается решить непосредственно или с помощью построения базиса Гребнера.

Следующее утверждение является одним из основных в данной статье.

Теорема 4. *При $\alpha > \beta \geqslant -1/2$, $1 \leqslant q < \infty$, $n \geqslant 1$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Наилучшие константы в неравенствах* (12) *и* (13) *совпадают*:

$$M_{n,q}^{(\alpha,\beta)} = D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}.$$

2. *Многочлен ϱ_n, наименее уклоняющийся от нуля относительно нормы пространства $L_q^{(\alpha+1,\beta)}$, является единственным экстремальным многочленом как неравенства* (12), *так и неравенства* (13).

3. *Многочлен ϱ_n, а значит и любой экстремальный многочлен неравенства* (12), *достигает равномерной нормы только в точке $x=1$.*

Существенным шагом обоснования теоремы 4 является доказательство того факта, что экстремальный многочлен неравенства (12) достигает равномерной нормы лишь в правой концевой точке 1 отрезка. Для обоснования этого факта применяется оператор обобщенного сдвига, порожденный весом Якоби, необходимые свойства которого обсуждались выше.

Для ультрасферического случая $\beta=\alpha>-1/2$ утверждение, аналогичное теореме 4, было доказано в работе авторов [1]. Для значения параметра $\alpha=\frac{m-3}{2}$, m – целое, $m\geqslant 3$, такое утверждение доказано ранее в [27] параллельно с изучением неравенства Никольского между равномерной нормой и L_q-нормой алгебраических многочленов на единичной сфере евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 3$.

Теорема 4 сводит проблему исследования неравенства (12) к существенно более простой, по нашему мнению, задаче (14). Следующее утверждение довольно простое и справедливо, на самом деле, в существенно более общей ситуации [27].

Лемма 1. *При $n\geqslant 1$, $\alpha,\beta>-1$, $1\leqslant q<\infty$ многочлен ϱ_n является единственным экстремальным многочленом неравенства* (13).

3. Доказательство теоремы 4. Применение оператора обобщенного сдвига в экстремальной задаче (12) для алгебраических многочленов, а точнее, в обосновании теоремы 4, мы считаем одним из основных результатов данного нашего исследования. Доказательство теоремы короткое и мы его сейчас приведем.

Для наилучших констант в неравенствах (12) и (13) справедливо неравенство $D_n\leqslant M_n$. Покажем, что на самом деле они совпадают. Воспользуемся оператором обобщенного сдвига (5). Пусть $f\in\mathscr{P}_n=\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ и равномерная норма f достигается в некоторой точке $t\in[-1,1]$. Из определения (5) видно, что функция $g(x)=(\Theta_t f)(x)$ также является многочленом порядка n и обладает свойством $g(1)=f(t)$. Применяя неравенство (13) и теорему 3, получаем

$$\|f\|_C=|f(t)|=|g(1)|\leqslant D_n\|g\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}}\leqslant D_n\|f\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}}. \tag{15}$$

В силу произвольности $f\in\mathscr{P}_n$ отсюда следует неравенство $M_n\leqslant D_n$. Равенство $M_n=D_n$ проверено.

Напомним, что через ϱ_n обозначен многочлен, который дает решение задачи (14). В силу леммы 1 он является единственным экстремальным в неравенстве (13). Имеем

$$D_n\,\|\varrho_n\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}}=|\varrho_n(1)|\leqslant\|\varrho_n\|_C\leqslant M_n\,\|\varrho_n\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}}.$$

Отсюда с учетом равенства $M_n=D_n$ следует, что

$$\|\varrho_n\|_C=|\varrho_n(1)|$$

и многочлен ϱ_n является экстремальным в неравенстве (12).

Нам осталось проверить, что ϱ_n – единственный экстремальный многочлен неравенства (12). Если экстремальный многочлен f_n неравенства (12) достигает равномерной нормы в концевой точке $x=1$ отрезка, то он будет экстремальным и в неравенстве (13). В силу леммы 1 такой многочлен с точностью до мультипликативной константы совпадает с ϱ_n.

Убедимся, что никакой экстремальный многочлен неравенства (12) не может достигать равномерной нормы на полуинтервале $[-1,1)$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что экстремальный многочлен $f_n\in\mathscr{P}_n$ неравенства (12) достигает равномерной нормы в точке $t\in[-1,1)$. На многочлене f_n должны обратиться в равенства оба неравенства в (15) и, в частности, второе неравенство. А это означает, что на многочлене f_n достигается норма оператора Θ_t. В силу теоремы 3 при $1<q<\infty$ многочлен f_n есть тождественная константа, а при $q=1$ многочлен f_n сохраняет знак на $(-1,1)$. Сейчас важно, что в обоих случаях многочлен f_n сохраняет знак на $(-1,1)$. В силу свойства положительности оператора обобщенного сдвига, многочлен $g_n = \Theta_t f_n$ также сохраняет знак на $(-1, 1)$.

На многочлене f_n первое неравенство (15) должно обратиться в равенство. Следовательно, многочлен $g_n = \Theta_t f_n$ является экстремальным в неравенстве (13). В силу свойства единственности экстремального многочлена многочлен g_n лишь мультипликативной константой отличается от ϱ_n. Многочлен ϱ_n имеет n перемен знака на $(-1, 1)$. Поэтому g_n не может сохранять знак на $(-1, 1)$. Полученное противоречие показывает, что в случае $\alpha > \beta \geqslant -1/2$ экстремальный многочлен неравенства (12) не может достигать равномерной нормы на полуинтервале $[-1, 1)$. Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. *Arestov V.*, *Deikalova M.* Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, № 4. P. 689–708.
2. *Arestov V.*, *Deikalova M.* Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Analysis Math. 2016. Vol. 42, № 2. P. 1–120.
3. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.
4. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. 327 с.
5. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. – М.: ИЛ, 1949. 798 с.
6. *Askey R.*, Orthogonal polynomials and special functions. – Philadelphia, Pa: SIAM, 1975.
7. *Бабенко А. Г.* Точное неравенство Джексона – Стечкина для L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах // Известия РАН. Сер. мат. 1998. Т. 68, № 6. С. 27–52.
8. *Koornwinder T.* Jacobi polynomials, II. An analytic proof of the product formula // SIAM J. Math. Anal. 1974, № 5. P. 125–137.
9. *Askey R. and Wainger S.* A convolution structure for Jacobi series // Amer. J. Math. 1969. Vol. 91. P. 463–485.
10. *Gasper G.* Positivity and the convolution structure for Jacobi series // Ann. Math., Second Series. 1971. Vol. 93, № 1. P. 112–118.
11. *Bavinck H.* A special class of Jacobi series and some applications // J. Math. Anal. Appl. 1972. № 37. P. 767–797.
12. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
13. *Szegö G. and Zygmund A.* On certain mean values of polynomials // J. Anal. Math. 1953. Vol. 3, № 1. P. 225–244.
14. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. – М.: Мир, 1965. 538 с.
15. *Корнейчук Н.П.*, *Бабенко В.Ф.*, *Лигун А.А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наукова думка, 1992. 304 с.
16. *Milovanović G. V.*, *Mitrinovic D. S.*, *Rassias Th. M.* Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 821 p.
17. *Borwein P.*, *Erdelyi T.* Polynomials and polynomial inequalities, Grad. Texts in Math., 161. – New York, NY: Springer-Verlag, 1995.
18. *Rahman Q.I.*, *Schmeisser G.* Analytic theory of polynomials. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2002. 742 p.
19. *Арестов В.В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Серия мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
20. *Arestov V. V. and Glazyrina P. Yu.* Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, № 11. P. 1501–151.
21. *Lupas A.* An inequality for polynomials // Univ. Beograd. Publ. Electrotehn. Fak. Sep. Mat. Fiz. 1974. № 461–№ 497. P. 241–243.
22. *Тайков Л.В.* Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи матем. наук. 1965. Т. 20. Вып. 3. С. 205–211.
23. *Babenko V.*, *Kofanov V.*, *Pichugov S.* Comparison of rearrangement and Kolmogorov–Nagy type inequalities for periodic functions // Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / Ed. B. Bojanov. Sofia: DARBA. 2002. P. 24–53.
24. *Gorbachev D. V.* An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 2. P. S117–S138.

25. *Simonov I.E., Glazyrina P.Yu.* Sharp Markov–Nikol'skii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 192. P. 69–81.
26. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ. 1976. 304 с.
27. *Арестов В.В., Дейкалова М.В.* Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Труды Института матем. и мех. УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 34–47.